10 класс

1. Условие. Из каких областей земной поверхности возможно одновременное наблюдение Арктура (α Волопаса) и Хадара (β Центавра)? Координаты этих звезд считать равными α_1=14.0ч, δ_1=+19°; α_2=14.0ч, δ_2=–60° соответственно. Атмосферной рефракцией и поглощением света пренебречь.

1. Решение. Как видно из условия задачи, прямые восхождения двух звезд совпадают. Следовательно, в любом пункте Земли их верхние кульминации будут происходить одновременно. Так как нам нужно найти пункты, где Арктур и Хадар могут вместе находиться на небе хоть в какое-нибудь время, достаточно рассмотреть только наиболее благоприятный момент: верхние кульминации этих звезд. Для высоты звезды в верхней кульминации мы можем записать выражение:

$$h = 90° - |\varphi - \delta|,$$

где φ – широта места, δ – склонение звезды. Чтобы звезду можно было увидеть, высота h должна быть положительной (рефракцией и атмосферным поглощением света мы пренебрегаем). Отсюда мы имеем

$$|\varphi - \delta_1| < 90°; |\varphi - \delta_2| < 90°.$$

Первому условию удовлетворяет диапазон широт φ от $-71°$ до $+90°$, второму – от $-90°$ до $+30°$. Итак, Арктур и Хадар можно увидеть на небе одновременно на широтах от $-71°$ до $+30°$.

1. Система оценивания. Выше было приведен наиболее простой способ решения задачи, однако он не является единственно допустимым. Участники олимпиады могут определить всю область видимости каждой из звезд на поверхности Земли для определенного момента, затем строить пересечение этих областей, обрисовывая его широтный диапазон. Возможно построение суточных путей Арктура и Хадара на небесной сфере разных широт и выделение моментов их одновременного нахождения над горизонтом. Все эти способы считаются правильными и оцениваются максимально при условии верного выполнения.

В случае решения задачи способом, описанным выше, участники олимпиады должны указать, что верхние кульминации обоих звезд происходят одновременно, и этот момент достаточен для рассмотрения. Этот вывод оценивается в 2 балла. Если он не делается, и участник олимпиады сразу определяет высоты звезд в верхней кульминации в зависимости от широты, максимальная оценка не может превышать 6 баллов.

Следующие 2 балла выставляются за правильное использование формулы для высоты в верхней кульминации, которая может быть записана по-другому – без знака модуля, в разном виде для кульминации к югу и северу от зенита. Если участник олимпиады записывает ее только в одном виде, например

$$h = 90° - \varphi + \delta,$$

получая в итоге ограничение на широту только для Хадара ($\varphi<30°$), то за этот и последующий этап решения выставляется только половина баллов (по 1 баллу за каждый) с общей оценкой не более 4 баллов.

Правильное численное определение ограничения на широту от каждой из звезд оценивается по 1 баллу. Наконец, формулировка окончательного ответа оценивается в 2 балла. Они не выставляются в случае неполного анализа верхней кульминации, описанного выше.

2. Условие. Последнее противостояние Сатурна состоялось 15 июня 2017 года. В каком ближайшем календарном году противостояния этой планеты с Солнцем не будет? Орбиты Земли и Сатурна считать круговыми.

2. Решение. В случае круговых орбит Земли и Сатурна синодический период Сатурна есть величина постоянная. Ее можно определить, исходя из величины орбитального периода Сатурна (29.458 лет), можно взять из справочных данных. Она равна (29.458/28.458)=1.03514 года или 378.1 день. Каждый следующий год противостояние Сатурна будет наступать на 13.1 день (или на 12.1 день для високосных лет) позже, чем в предыдущем году, то есть в среднем на 12.85 дней позже, чем год назад.

От 15 июня до 31 декабря проходит 199 дней. Разделив это число на 12.85, получаем 15.5 лет. Через 15 лет (в числе которых будет 4 високосных – 2020, 2024, 2028 и 2032) дата противостояния Сатурна сместится на (4*12.1)+(11*13.1)=192.5 дня. Следовательно, в 2032 году противостояние произойдет 24 или 25 декабря (в реальности – 24 декабря в 23ч UT). Следующее противостояние состоится уже в январе 2034 года. Противостояния Сатурна с Солнцем не случится в 2033 году.

Можно рассуждать другим, похожим способом. За четыре года, среди которых 3 обычных и один високосный, дата противостояния сместится на $(1 \cdot 12.1) + (3 \cdot 13.1) = 51.4$ дня. За 3 таких четырехлетки дата противостояния сместится на 154.2 дня (это будет в 2029 году). За два невисокосных года (2030 и 2031) противостояние сместится еще на $2 \cdot 13.1 = 26.2$ дня, а за високосный 2032 год – еще на 12.1 дня и составит 192.5 дня, как мы и получили выше.

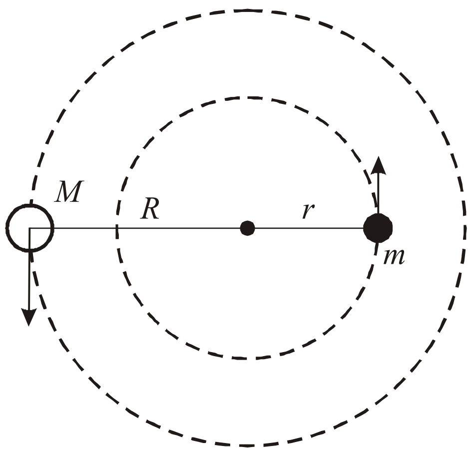
2. Система оценивания. Первым этапом решения задачи является вычисление синодического периода Сатурна либо взятие его правильного значения из справочных данных. Этот этап решения оценивается в 1 балл. Далее участники могут пойти простым способом, выписывая даты последующих противостояний, исходя из значения синодического периода ровно в 378 дней. При условии правильного учета високосных лет эти рассуждения приводят к правильному ответу с общей итоговой оценкой 8 баллов. Если фактор високосных лет не учитывается, то, несмотря на правильный ответ, оценка снижается на 1 балл (итоговая – не более 7 баллов).

При решении задачи способом, описанным выше, 2 балла выставляется за расчет числа дней от 15 июня до 31 декабря (или 1 января), еще 5 баллов – за вычисление числа полных лет до момента, когда дата противостояния перейдет с декабря на январь. Если фактор високосных лет не учитывается, общая оценка снижается на 1 балл.

В этом же случае, 5 баллов за основной этап решения (вычисление числа полных лет) разделяются следующим образом: число дней, на которое смещается дата противостояния в невисокосном году – 2 балла, в високосном году – 1 балл, переход к числу лет до перехода противостояния в новый год – 2 балла.

3. Условие. Оптическая звезда входит в двойную систему с темным компактным объектом. Масса темного объекта равна 1.4 массы Солнца. Движение вокруг центра масс происходит так, что у оптической звезды исчезает годовое параллактическое смещение в небе Земли. Определите массу этой звезды. Орбиты Земли и звезд в системе считать круговыми.

3. Решение. Изобразим описанную в условии задачи систему из светлой и темной звезды. Обе они движутся по круговым орбитам вокруг центра масс. Коль скоро у светлой звезды с массой M нет параллактического смещения, линия "Земля – звезда" все время сохраняет фиксированное направление в пространстве. В случае круговых орбит это может быть только в том случае, если звезда описывает круг около центра масс с радиусом R, равным 1 а.е. с периодом 1 год в плоскости, параллельной плоскости вращения Земли (плоскости эклиптики).



Выражая радиусы орбит в астрономических единицах, массы – в массах Солнца, а период обращения – в годах, запишем выражение обобщенного III закона Кеплера:

$$\frac{(M+m)T^2}{(R+r)^3} = 1.$$

Фактически, мы сравниваем эту систему с системой "Солнце-Земля", где все три величины равны единице. Для двойной системы также T=1, а для радиусов орбит справедливо соотношение:

$$M\,R = m\,r.$$

Отсюда $r = R\,(M/m)$, и далее:

$$\left(1+\frac{M}{m}\right)^3 = (M+m).$$

Обе величины M и m безразмерны, так как представляют собой отношение масс звезд к массе Солнца. Умножая обе части уравнения на m^3, получаем:

$$(M + m)^3 = m^3\ (M + m).$$

Из этого мы можем определить массу звезды M (в массах Солнца):

$$M = m^{3/2} - m = 0.26.$$

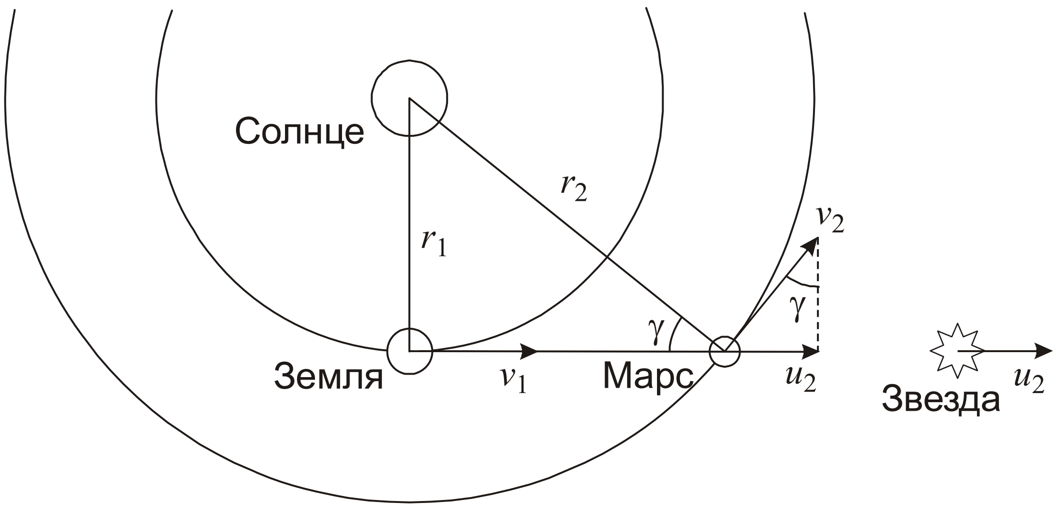
Оптическая звезда, вероятно, представляет собой красный карлик и является, по сути, спутником темного массивного объекта.

3. Система оценивания. Для решения задачи участники олимпиады должны сделать вывод о том, что круговая траектория оптической звезды по своим характеристикам идентична орбите Земли. Этот вывод можно сделать в другом виде: смещение равно параллаксу, а параллакс есть угол, под которым виден радиус орбиты Земли, следовательно, радиус орбиты звезды равен 1 а.е. Вывод в любой из форм оценивается в 2 балла. Если он не выписан в явном виде, эти 2 балла не выставляются, но дальнейшее решение оценивается в полной мере.

Правильное использование III закона Кеплера оценивается в 2 балла, при этом его запись может отличаться от приведенной выше (может использоваться полная формулировка с системным выражением всех величин). Правильное соотношение радиусов орбит звезд оценивается еще в 1 балл. Наконец, 3 балла выставляется за правильное математическое исполнение решения и запись ответа.

4. Условие. Находясь в западной квадратуре, планета Марс оказалась на небе очень близко к звезде спектрального класса G. Линии в спектре Марса и звезды точно совпали по длинам волн. Найти лучевую скорость звезды относительно Солнца. Орбиты Земли и Марса считать круговыми.

4. Решение. По спектральному классу звезда похожа на Солнце, то есть, содержит примерно те же спектральные линии. В спектре Марса линии тоже, в основном, солнечные, так как планета отражает солнечный свет. Даже если в спектре Марса и будут собственные спектральные линии, они не будут смещены относительно солнечных, так как орбиту Марса по условию задачи мы считаем круговой, и расстояние между Марсом и Солнцем не изменяется. Звезда и Марс движутся относительно наблюдателя на Земле с некоторыми скоростями. Одинаковое смещение спектральных линий от эталонного положения означает, что лучевые скорости звезды и планеты равны. Изобразим положение планет, описанное в условии задачи:



В момент западной квадратуры Марса планета Земля летит в пространстве со скоростью v_1 точно по направлению к Марсу, скорость же Марса v_2 образует некоторый угол к линии "Земля-Марс". Лучевая скорость Марса в момент наблюдений с Земли составляет

$$V_R = u_2 - v_1 = v_2 \sin\gamma - v_1 = v_2\,(r_1/r_2) - v_1.$$

Здесь r_1 и r_2 – радиусы орбит Земли и Марса. Круговые скорости планет при обращении по орбитам равны

$$v_{1,2} = \sqrt{\frac{GM}{r_{1,2}}}.$$

Здесь M – масса Солнца. Поэтому для круговых скоростей справедливо соотношение:

$$\frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{r_1}{r_2}}.$$

В итоге,

$$V_R = v_1 \left[\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{3/2} - 1\right].$$

Обратим внимание, что эта скорость отрицательна, то есть Земля приближается к Марсу. Коль скоро линии в его спектре совместились с линиями в спектре звезды, геоцентрическая лучевая скорость у звезды также равна V_R. Так как звезда располагается несравнимо дальше Солнца, направление от Солнца и Земли к звезде одинаковы, и искомая гелиоцентрическая лучевая скорость звезды равна

$$V_0 = u_2 = V_R + v_1 = v_1 \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^{3/2} = +15.8 \text{ км/с.}$$

Обратим внимание, что эта скорость положительна: звезда удаляется от Солнца.

4. Система оценивания. Для решения задачи участники олимпиады должны указать, что геоцентрические лучевые скорости Марса и звезды совпадают, что оценивается в 2 балла. После этого участники могут вести решение способом, описанным выше, записав выражение (либо найдя численно) геоцентрическую лучевую скорость Марса (3 балла), приравнять ее к геоцентрической лучевой скорости звезды (1 балл) и вычислить гелиоцентрическую скорость звезды (2 балла). Они могут также, напрямую связать компоненту гелиоцентрической скорости Марса (v_2), направленную от Земли, с гелиоцентрической скоростью звезды, что также является правильным.

Если участник олимпиады путает гелиоцентрическую и геоцентрическую лучевые скорости, получая в итоге ответ около –14 км/с, максимальная оценка не может превышать 4 баллов.

Если участник олимпиады путает восточную элонгацию с западной, что при правильных вычислениях дает ошибку в знаке итоговой скорости, итоговая оценка составляет не более 6 баллов.

5. Условие. У звезды 12^m спектрального класса G2V обнаружили колебания блеска с периодом 10 лет, вызванные прохождением планеты по ее диску – в полосе V глубина составила 1.500% по яркости, а в линии Hα – 1.520% по яркости. Оцените размеры планеты и высоту ее атмосферы, считая атмосферу состоящей из атомарного водорода и непрозрачной в линии Hα, а орбиту планеты – круговой, лежащей на луче зрения. Определите максимальное угловое расстояние между планетой и звездой.

5. Решение. Спектральный класс G2V означает, что звезда по своим свойствам похожа на Солнце. Орбитальный период планеты составляет 10 лет, из чего, по III закону Кеплера, заключаем, что расстояние между планетой и звездой составляет $10^{2/3}$=4.64 а.е.

Будем считать, что при прохождении планеты перед диском звезды в полосе V свет звезды блокируется только самой планетой, а в линии Hα – еще и ее водородной атмосферой. Обозначив радиусы планеты и звезды как r и R, а высоту атмосферы как h, запишем:

$$\frac{\pi\, r^2}{\pi\, R^2} = 0.0150; \quad \frac{\pi\,(r+h)^2}{\pi\, R^2} = 0.0152.$$

Отсюда r=0.1225R = 85700 км, r+h=0.1233R = 86300 км, h = 0.0008R = 600 км. Найдем теперь расстояние до звезды, исходя из ее видимого блеска (12^m) и абсолютной звездной величины (около 5^m):

$$\lg r = \frac{m - M + 5}{5}; \quad r = 250 \text{ пк}.$$

Отрезок в 4.64 а.е. будет виден с такого расстояния под углом (4.64/250) = 0.02″. Это и есть максимальная элонгация планеты от звезды при наблюдении с Земли.

5. Система оценивания. Решение задания достаточно четко разбивается на основные этапы, которые можно выполнять в разном порядке:

Определение расстояния между звездой и планетой – 2 балла.

Радиус планеты – 2 балла.

Высота атмосферы на планете – 2 балла.

Максимальная элонгация – 2 балла (1 балл – вычисление расстояния до звезды, 1 балл – максимальная элонгация).

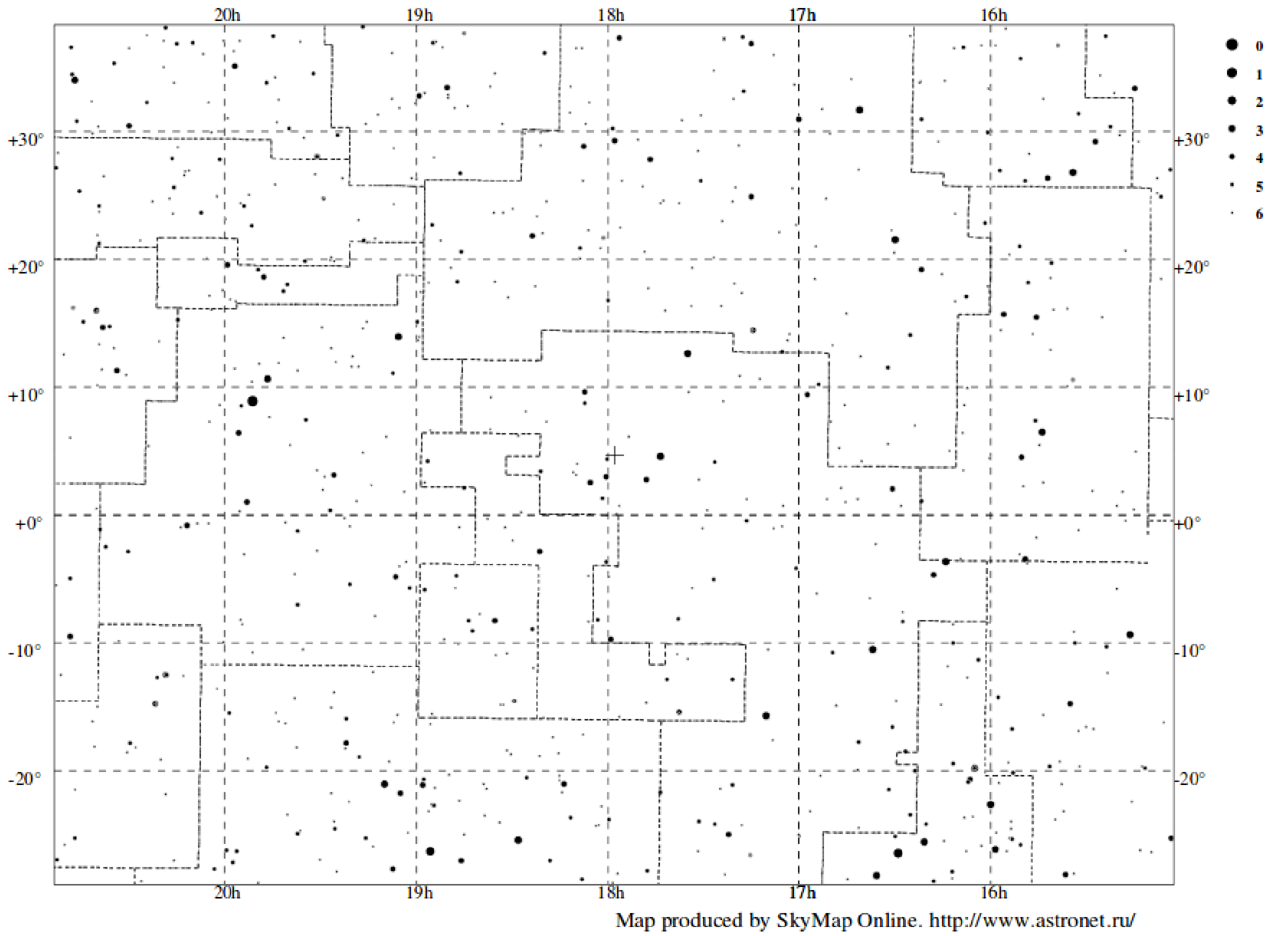
6. Условие. Собственное движение звезды Барнарда равно –0.8″/год по прямому восхождению и +10.3″/год по склонению. Лучевая скорость равна –111 км/с, параллакс – 0.547″. Вам дана звездная карта окрестностей этой звезды. Сама звезда находится в середине карты и помечена крестом. Определите:

1) В каком созвездии находится звезда Барнарда?

2) В каком направлении на карте движется звезда?

3) В какое созвездие эта звезда переместится?

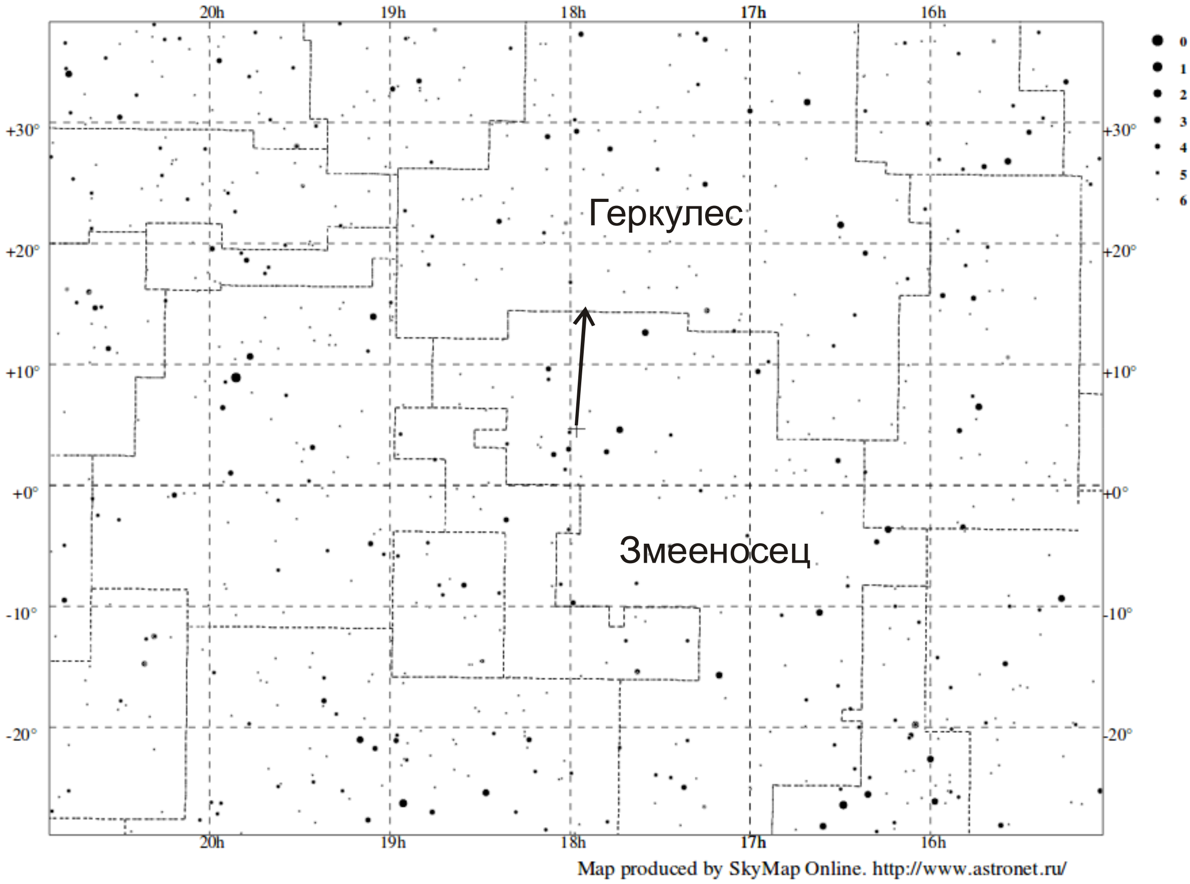
4) Когда это произойдет?

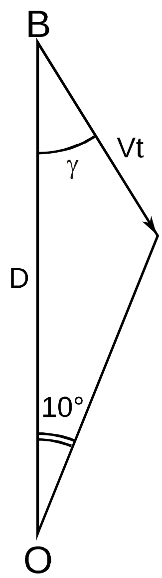


Решение. На текущий момент звезда Барнарда располагается в созвездии Змееносца. Само это созвездие не имеет ярко выраженного рисунка, но его имеют ближайшие соседние созвездия. Так к востоку находится легко узнаваемое созвездие Орла, рядом с ним Стрела и Дельфин. В правом верхнем углу созвездие Северной короны, а правом нижнем – характерная часть созвездия Скорпион.

Собственное движение звезды Барнарда по склонению в десять раз больше, чем по прямому восхождению. Поэтому звезда будет двигаться почти строго вдоль круга склонения, а движением по прямому восхождению можно пренебречь. Раз собственное движение звезды по склонению положительно, значит, со временем склонение звезды увеличивается, а сама звезда смещается в сторону северного полюса мира. В том направлении расположено созвездие Геркулеса.

Текущие координаты звезды можно определить с помощью карты в условии. Они равны α~18ч~270°, δ=+4.5°. До границы с созвездием Геркулеса почти ровно 10°. Определим, за какое время наша звезда преодолеет это угловое расстояние. Решим вначале задачу наиболее точно.





Поскольку лучевая скорость звезды отрицательна, она приближается к нам. Ее тангенциальная скорость равна

$$V_T = 4.74\,\frac{\mu}{\pi} = 89.3 \text{ км/с.}$$

Здесь μ – собственное движение в угловых секундах в год, а π – параллакс в угловых секундах. Полная скорость звезды равна

$$V = \sqrt{V_T^2 + V_R^2} = 142 \text{ км/с.}$$

Здесь V_R – лучевая скорость звезды в км/с. Угол между лучом зрения и направлением вектора скорости звезды составляет

$$\gamma = \text{arctg}\left|\frac{V_T}{V_L}\right| = 39^O.$$

Расстояние до звезды D равно π^{-1}=1.83 пк или $5.65\cdot 10^{13}$ км. Искомое время получаем из теоремы синусов:

$$t = \frac{\sin 10^O}{\sin(180^O - 10^O - \gamma)}\frac{D}{V} = 2900 \text{ лет}.$$

Ответ задачи с неплохой точностью можно получить быстрее, учитывая, что угловое расстояние до границы созвездий (10°) существенно меньше угла γ (39°). В этом случае мы можем предположить, что собственное движение звезды Барнарда по созвездию Змееносца постоянно по времени. Тогда время до пересечения границы есть просто отношение углового расстояния до нее к собственному движению:

$$\bar{t} = \frac{10^O}{10.3''/\text{год}} = 3500 \text{ лет}$$

Этот ответ получился завышенным из-за игнорирования приближения звезды Барнарда и увеличения ее собственного движения.

6. Система оценивания. Правильное указание текущего положения звезды Барнарда в созвездии Змееносца оценивается в 1 балл. Указание соседних созвездий в доказательство этого вывода не требуется. Правильное указание направления движения звезды оценивается в 2 балла. Ответ, что звезда переместится в созвездие Геркулеса, оценивается 1 баллом, но только в том случае, если направление движения звезды указано верно, и звезда, двигаясь в этом направлении, действительно окажется в созвездии Геркулеса.

Дальнейшее решение задачи оценивается в полной мере вне зависимости от предыдущих этапов. Определение расстояния (по рисунку), которое отделяет звезду от созвездия Геркулеса, оценивается в 1 балл (если выбрано ошибочное направление движения звезды, то берется угловое расстояние от соответствующего созвездия). Вычисление времени

t оценивается в 3 балла. Оно может производиться в разное количество этапов. Если решение не доведено до конца или с какого-то момента становится неверным, следует выставлять по 1 баллу за правильное вычисление расстояния до звезды и ее тангенциальной скорости.

Вычисление времени упрощенным методом оценивается в 1 балл (суммарная оценка – до 6 баллов).